意外性のある確率

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　情報社会学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

2013 年 10 月 13 日更新，2014 年 5 月 29 日更新

１．　誕生日が同じ確率

確率の問題はいろいろあるが予想と現実が大きくくいちがうと，確率の勉強はますます面白くなる．予想と現実がくいちがう確率のことを私は「意外性のある確率」と呼んでいる．今回はそのような確率の問題を２つ紹介したい．

クラスの中に誕生日が同じものがいる確率はどの程度であろうか．1 クラスは約 40 人とする．1 年は 365 日として，誕生日が同じ人がいるかいないかを学生に予測させてみる．ほとんどの学生は「いない」の方に予測する．その理由は，1 年は 365 日でクラスの人数は 40 人だから誕生日が重なる確率は $\frac{40}{365}$ であり，クラスの人数が 366 人になったとき始めて誕生日が同じものがいることになると考えるのである．

確率は実際に実験をしてみないと理解が深まらない．私は「情報数学」の講義で文系の学生を相手に毎年この例題をとりあげている．学生に自分の誕生日を言わせて，ひととおり済んだあと，誕生日が同じだった人は手をあげなさい，というと必ずといっていいほど手を上げるのだ．確率が $\frac{40}{365}$ 程度と予測しただけに大きく外れたので学生は不思議に思う．そこで私は，数式による確率の説明を行う．

これは余事象の考え方で解ける問題だ．クラスの人数を n 人とし，1 年を 365 日とする．まず，n 人すべての誕生日が異なる確率をもとめる．1 人目が選べ

る誕生日の確率は 365 日の中の 365 日であるから $\frac{365}{365}$, 2 人目が選べる誕生日の確率は 365 日の中から 1 日のぞいた 364 日であるから $\frac{364}{365}$, n 人目が選べる誕生日の確率は $\frac{365-(n-1)}{365}$ となるから，n 人すべてが異なる確率は

$$P_1 = \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}$$

となる．すくなくとも誰かの誕生日が同じである確率は上の確率の余事象としてもとまり，

$$P = 1 - P_1 = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}$$

となる．そして，$n = 23$ のとき $P = 0.507$ となる．つまり，クラスの人数が 23 人以上であれば，誕生日が同じものがいる確率が半分を超えるのである．23 人といえば 365 日に対して 1 割もない数である．

余事象の考え方は非常に有効で，”誕生日がすべて異なる”の否定と，すくなくとも誰かの誕生日が同じの「すくなくとも」の関係は英語では，not always と at least の関係ではなかっただろうか．余事象を使った問題は受験でよく出てくるので慣れておくことが大事であろう．このような意外性のある確率の問題が知られていなく，試験問題として出されることが少ない理由は P_1 または P を筆算で計算することが難しいためであろう．面白い例題でありながら試験問題に向かないという理由だけで忘れ去られている問題である．

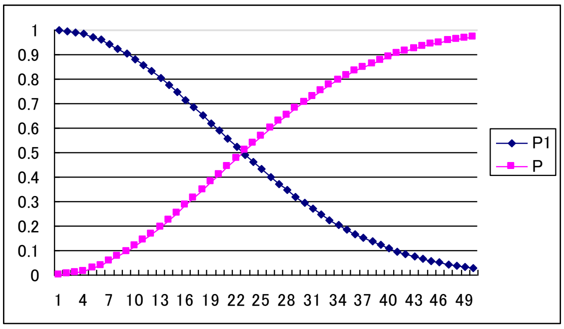

図１．すくなくとも 1 組の誕生日が同じ確率

現在ではパソコンが普及しているので表計算ソフトを使えば計算は容易

である．誕生日が同じものがいる確率 P の値をクラスの人数 n を変化させながらグラフ化すると確率の理解がさらに深まるであろう． n が小さいときは $(n<10)$，P は小さいが $(P<0.1)$，それ以降は急激に増加し，$n=23$ で $P=0.507$ となり， $n>40$ で $P>0.9$ となる．この誕生日の例題は，授業で実験してもほぼ間違いなく実現できる例題であるので，自信をもって紹介することができる．

２．　２組以上が同じ確率？

私は毎年，誕生日の例題を講義している．ところが今年，60 人のクラスで実験してみたところ 3 組もの誕生日が同じであるという結果になったのだ．すくなくとも 1 組さえあれば確率の授業では十分であるが，3 組も誕生日が同じであったのだ．そこで，クラス 60 人に対して誕生日が同じなのが 3 組というのは，確率の妥当な値であるのかという新しい疑問がめぐらすのであった．過去 2 年間クラスで実験したところ，そのときは受講生が 40 人くらいであったが誕生日が同じというのは 1 組であった．ところが今年は 60 人で誕生日が同じは 3 組もあった．さらに，3 組のうち 1 組は，隣り合わせにすわっているもの同士の誕生日が同じであったのだ．果たしてこれは妥当な数値なのだろうか？

シュミレーションするのに乱数を用いると便利である．Visual BASIC 言語で確認できる．乱数を生成する組込み関数 RND を用いて約 50 行でプログラムは可能である．私は，60 人の実験では 2 組以上の誕生日が同じである確率が高い，という数値計算での予測ができたので数式で押えておくこととした．1 組だけ誕生日が同じである組合せは次のように考える．

まず，n人の誕生日の組合せは全部で365^{n}通りある．n人の中から 2 人を選ぶ組合せは， ${}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_2=\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-2)!2!}$ 通りある．選ばれた 2 人を 1 人目，2 人目としよう．1 人目と 2 人目は同じ誕生日であるから 365 日の中から選ぶ．3 人目からは誕生日が異なるから$(365-1),(365-2),\cdots,(365-(\mathrm{n}-2))$日の中から選ぶ．このような誕生日の選び方は全部で ${}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_2\times 365\times(365-1)\times(365-2)\times\cdots\times(365-(\mathrm{n}-2))$ 通りある．よって n 人の中で 1 組だけ誕生日が同じである確率P_2は，つぎのようになる．

$$P_2 = {}_{n}C_2 \times 365 \times (356-1) \times (365-2) \times \cdots \times (365-(n-2)) \times \frac{1}{365^n}$$

$$= \frac{{}_{n}C_2}{365} \times \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \frac{365-2}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-2)}{365}$$

誕生日が重なる人が 2 人以上（1 組でも 3 人以上，または 2 組以上）の確率は

$1-P_1-P_2$

となる．以上の計算式の元に $n=23$ と $n=60$ について表計算ソフトで計算してみると，その値は表 1 のようになった．

n	P_1	$1-P_1$	P_2	$1-P_1-P_2$
23	0.493	0.507	0.363	0.144
60	0.006	0.994	0.034	0.960

表 1． 誕生日が重なる確率 $(n=23, 60)$

また，確率 P_2 を表計算ソフトで計算するとき，分母と分子をつぎのように分けて計算させると計算過程でオーバーフローを起こしてしまう．

分子＝ ${}_{n}C_2 \times 365 \times (365-1) \times \cdots \times (365-(n-2))$

分母＝ $365 \times 365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^n$

P_2 の計算がオーバーフローしない工夫は，計算の順序を各項ごとに計算することである．これでいくと，60 人のクラスでは 3 組が同じどころか，4 組もまったくでたらめでないことが分かる．

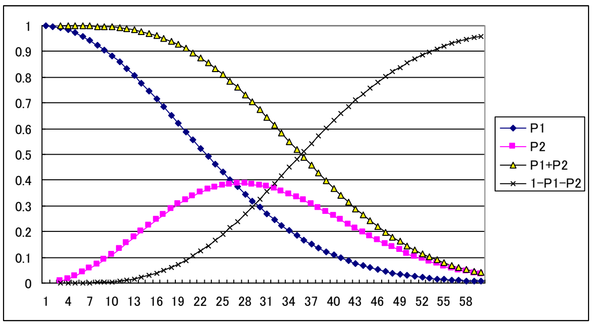

図 2． 2 組以上の誕生日が同じ確率

３．　元の席と同じ確率

もうひとつ意外性のある確率を紹介しよう．それは席替えの確率である．クラスの席替えをする場合，元の席と同じであったという生徒がいる確率はどの程度であろうか．皆さんの中に席替えをしても違う席にならなかったという不幸な経験を持っている人はいないだろうか．自分でなくても変わらなかった友達がいたのを知っているだろうか．ここでは，このようなことは決して不幸でもなく，高い確率で起こりうることを説明しよう．

席替えの問題はクリスマス・プレゼントの問題としても同じである．自分の持ってきたプレゼントを引いてしまうバツの悪さ，行いが悪かったのかと悲観すべきなのだろうか．そうではない，そういう確率が意外と大きいのである．数式で表す前に数え上げの方法で試してみよう．生徒を１，２，･･･のように番号で示し，席替え前と席替え後を比較して，席が元と同じであった場合を丸印で示した．生徒が２人の場合は席が２つあるから並べ方は $2!=2$ 通りあり，表２のように席替え後の１行目は１と２がともに変わらず，席が変わらないケースは１通りとなり，確率は 0.5 となる．

席替え前	1	2
席替え後	①	②
	2	1

表２．$n=2$ の場合

同様にして，生徒が３人の場合を表３に示した．生徒の並べ方は $3!=6$ 通りあり，席が元と同じである場合を丸印で示すと，席替え後の１行目は１，２，３の３人が同じであり，２行目は１だけが同じであり，３行目は３だけが同じであり，６行目は２だけが同じとなる．そして席が変わらないケースは４通りとなるから，確率は

$$P=\frac{4}{3!}=\frac{4}{6}=0.666\cdots$$

となる．

席替え前	1	2	3
席替え後	①	②	③
	①	3	2
	2	1	③
	2	3	1
	3	1	2
	3	②	1

表３． $n=3$ の場合

問１． n＝４のとき，少なくとも１人の席が変わらない確率を数え上げによる方法で求めよ．

席替え後の並べ方は $4!=24$ 通りあり，席が変わらないケースは 15 通りあるので確率は

$$P=\frac{15}{4!}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}=0.625$$

となる．このように数え上げの方法は確実であるが数式でおさえることも大切である．生徒が n 人の場合，少なくとも１人が変わらない確率は

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$$

となることが知られている．この式の導入を考えてみよう．

生徒１が変わらない場合は，残りの $(n-1)$ 人の並べ方は $(n-1)!$ 通りあり，これが n 人に対して同様に成り立つから全部で

$n\times(n-1)!=n!$ 通り

となる. この場合残りの生徒が変わらないこともあるが, このことは後述する.

生徒１と生徒２が変わらない場合は, 残りの $(n-2)$ 人の並べ方は $(n-2)!$ 通りあり，生徒２人の選び方は ${}_nC_2$ 通りあるから全部で

$${}_nC_2\times(n-2)!=\frac{n!}{(n-2)!2!}\times(n-2)!=\frac{n!}{2!}\text{通り}$$

となる．

同様にして生徒１と生徒２と生徒３が変わらないというように，生徒３人が変わらない場合は

$$ {}_nC_3 \times (n-3)! = \frac{n!}{3!} \text{通り} $$

となる．

以上の関係はやや難しいので，$n=3$についてベン図を用いて説明しよう（図3）．生徒１が変わらない事象をA_1，生徒２が変わらない事象をA_2，生徒３が変わらない事象をA_3とする．すると少なくとも１人の生徒が変わらない事象Aはつぎのようになる．

$$ A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 + A_2 + A_3) - (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1) + A_1A_2A_3 $$

事象A_1には純粋に生徒１だけが変わらない場合と，生徒１と生徒２が変わらない場合と，生徒１と生徒３が変わらない場合と，生徒１と生徒２と生徒３が変わらない場合の４つのケースがある．これらの重複した部分を消去したのが先の式である．$(A_1 + A_2 + A_3)$は単純に３つの事象を足し合わせたものである．これでは足しすぎで重複した部分を引いたのが$-(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1)$である．しかし，これでは引きすぎとなるので，また$A_1A_2A_3$を足しているのである．

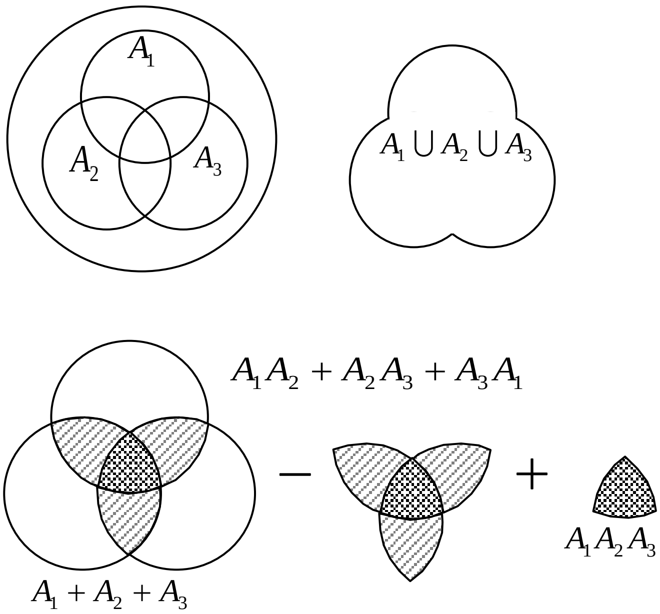

図３．ベン図による説明（$n=3$）

表３で示した $n=3$ の場合の $3!=6$ 通りとの関係で見ておこう．$A_1+A_2+A_3$ は，席替え後の１行目と２行目，１行目と６行目，１行目と３行目の合計６通りである． $A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$ は，１行目が３通りで，合計３通りである． $A_1A_2A_3$ は，１行目の１通りである．よって

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 6-3+1=4$ 通り

となる．また，席替えで変わる場合は，４行目と５行目の２通りとなる．

$1-A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 2$ 通り

変わらないのが４通りで変わるのが２通りで，合計６通りとなることが確認できる．

４．　モンモルの定理

このようにして一般の n に対して，符号を交互に変えて加えることによって事象 A を求めることができる．したがって少なくとも１人が変わらない場合は

$$n!-\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}-\frac{n!}{4!}+\cdots\pm 1 \quad \text{通り}$$

あり，全体の並べ方は $n!$ 通りであるから，確率 P は

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$$

となる．生徒の数 n と確率 P の表をつぎに示しておく（表４）．この式の値は n が大きくなるにつれて

$$1-\frac{1}{e} \qquad (\approx 0.63212)$$

の値に近づくことが知られている．（e は自然対数で $e \approx 2.71828$ である．）驚くべきは n の値にかかわらず，この確率は同程度であることである．そして， n が無限大でも 0.6 を超えるのである．1000 人

n	P
1	1
2	0.5
3	0.6667
4	0.625
5	0.6333
6	0.6320
7	0.6321

表４．生徒数 n と確率 P

のクラスで席替えしても，1000 人でクリスマスのプレゼント交換をしても，同じ席であったり，自分が持ってきたものを引いてしまったりする確率が 0.6 を超えるのである．ただし，この数値は 1 に近づかないところが誕生日の確率とは異なる．

参考文献(1)によれば，この問題には数多くの変形があり，見事な解答がされているのはモンモル（P.R. Montmort，1708 年）にまでさかのぼるとある．n 枚の異なるカードからなる同じ 2 組のものが，それぞれランダムな順序で並べられ，たがいに向き合って置かれている．その場合，カードが一致する確率はどの程度であろうか．n 個の手紙と n 個の封筒がある．秘書がでたらめな入れ方をした場合，手紙と封筒が一致する確率はどの程度であろうか．

携帯品預かり所で帽子が混じりあって，でたらめに客に渡されることを想像してみる．あるひとが自分の帽子を受け取れば一致が生じたとする．この一致の確率はどの程度であろうか．8 人の客がいる会合で帽子が一致する確率と，10000 人の集まりにおける確率と比較してみると，意外なことに n に無関係で約 $\frac{2}{3}$ であることである．席替えの確率はこのように多くの変形があり，ずいぶん昔から注目されてきているのである．

参考文献

(1) W.フェラー，河田龍夫訳『確率論とその応用 I・上』紀伊國屋書店，1960，127-132